

# Contributions de J.J. Moreau

## à la mécanique non régulière ; applications aux matériaux granulaires

M. JEAN

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, mjean.recherche@wanadoo.fr

### Résumé :

*Ce texte a pour contenu les éléments d'une conférence donnée au 22<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, conférence ayant pour objet de présenter un aperçu des travaux de Jean-Jacques Moreau, en particulier de ses travaux concernant la mécanique du contact et de ses applications à la simulation numérique des matériaux granulaires. Ce texte est ma vision personnelle des travaux de Jean-Jacques Moreau.*

### Abstract :

*The contents of this text are elements of a conference given at the 22<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique. A survey of Jean-Jacques Moreau's works was presented, in particular works concerning contact mechanics and applications to granular materials. This presentation is my personal interpretation of Jean-Jacques Moreau's works.*

**Mots clés : Analyse Convexe, mécanique non régulière, contact frottement, méthodes CD - NSCD, matériaux granulaires, tenseur de contrainte.**

## 1 Introduction

Jean-Jacques Moreau (1923-2014) mathématicien et mécanicien a été chercheur au CNRS, puis Professeur à l'Université de Poitiers, puis Professeur à l'Université de Montpellier depuis les années 1958. Il est le cofondateur avec Olivier Maisonneuve du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil à Montpellier (LMGC). Il s'est intéressé au début de sa carrière à la mécanique des fluides. Il a apporté des résultats originaux, comme l'invariant d'hélicité en dynamique des fluides parfaits (1962). Jean-Jacques Moreau est surtout connu pour être l'inventeur de l'Analyse Convexe (parallèlement avec J.T. Rockafellar, qui avait d'autres motivations que les motivations mécaniques de J.J. Moreau). L'Analyse Convexe se révèle un outil indispensable et particulièrement fertile pour traiter la Mécanique non Régulière, c'est-à-dire une mécanique qui fait face à des lois de comportement non différentiables, comme on en trouve en présence de contact et de frottement. Dans les années 1970, J.J. Moreau publie des articles fondateurs concernant les problèmes quasistatiques en présence de conditions unilatérales, de frottement de Coulomb, de plasticité, problèmes mis sous la forme générique de *processus de rafle*.

En 1984 J.J. Moreau décide de mettre à l'épreuve ses concepts au moyen d'une méthode numérique dérivée des formulations en Analyse Convexe, méthode Contact Dynamics (CD). Historiquement le premier algorithme sera appliqué à l'étude fine du choc entre deux rigides.

La méthode est rapidement étendue aux collections de corps rigides en présence de contact unilatéral et de frottement sec tels que les matériaux granulaires et les édifices composés de blocs. Une des caractéristiques de la méthode CD est qu'il s'agit d'une méthode complètement implicite. Cette méthode se distingue ainsi des méthodes de la dynamique moléculaire (par exemple la méthode de P. Cundall & al.) méthodes praticables seulement si le contact frottant est régi par des lois sous formes d'applications (et non pas de multi-applications) autrement dit si ces lois sont régulières ou régularisées. J.J. Moreau avait son propre style de programmation. Il fournissait volontiers aux utilisateurs qui le demandaient des versions clés en mains.

La méthode CD a été étendue au traitement de corps déformables par M. Jean sous le nom de méthode NSCD. D'autres méthodes parentes ont été développées au LMGC par P. Alart, F. Radjaï et leurs collaborateurs. F. Dubois arrivé au LMGC en 1999 a totalement refondu les logiciels existants, introduit de nouvelles applications (adhésion, usure, lois de comportement complexes, couplages divers thermiques et hydrodynamiques) et la possibilité de communiquer avec d'autres logiciels. Le logiciel porte actuellement le nom de LMGC90. C'est un logiciel libre destiné à la recherche. Il est couramment développé par de nombreux partenaires et maintenu au laboratoire LMGC.

J.J. Moreau a abordé un certain nombre de questions sujettes à controverse, qu'il a élucidées et présentées dans des articles mais aussi dans des films pédagogiques fabriqués entièrement par lui ; parmi ces questions, le fonctionnement des avalanches, la ségrégation des particules sous l'effet des vibrations, le blocage et l'indétermination, les effets de voûte sous un tas. Il s'est particulièrement intéressé à la notion de contrainte dans les matériaux granulaires. Il a montré que c'était un concept pertinent comme le tenseur de Cauchy dans les milieux continus. La définition usuelle produit un tenseur légèrement non symétrique. Vers 2008, il a donné la définition exacte de ce que doit être le tenseur de contrainte, tenseur alors symétrique. Cette définition s'étend à n'importe quelle collection d'objets. L'équation d'équilibre pour la collection s'écrit  $\operatorname{div} \sigma = -f$ , comme pour un milieu continu.

## 2 Corps en contact, variables locales

Pour illustrer comment le langage de l'Analyse Convexe est le langage pertinent pour traiter la mécanique non régulière, je choisis un problème de contact. Les chocs entre corps se caractérisent par des discontinuités de vitesse. La classe de mouvements appropriée est celle des mouvements dont les dérivées par rapport au temps (les vitesses) sont à variations localement bornées. Dans les efforts, on trouve les forces ordinaires, fonctions du temps de carré sommable, et des mesures de Dirac qui représentent les percussions. L'équation de la dynamique est interprétée au sens des mesures. Les nombreux travaux de J.J. Moreau sur les mesures, en particulier les mesures sur la droite réelle trouvent en partie ici leur motivation.

Une fonction à variation localement bornée  $t \rightarrow V(t)$  a la propriété qu'en tout temps  $t$  elle possède une limite à droite notée  $V^+(t)$  et une limite à gauche notée  $V^-(t)$ . Dans un contexte mécanique, si  $t \rightarrow V(t)$  note une vitesse, et si un choc survient au temps  $\tau$ ,  $V^-(\tau)$  est la vitesse avant l'instant du choc, et  $V^+(\tau)$  la vitesse après l'instant du choc.

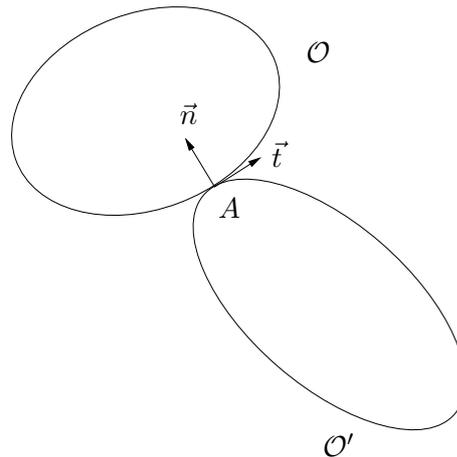


Figure 1: Corps en contact, variables locales

On considère deux corps en contact et pour simplifier on admet qu'il existe un vecteur unitaire normal  $\vec{n}$  unique au point de contact  $A$ , dirigé du corps antagoniste vers le corps candidat et  $\vec{t}$  un vecteur unitaire orthogonal à  $\vec{n}$ . Je note  $U = (U_T, U_N)$  la paire des composantes normale et tangentielle du vecteur vitesse relative du candidat par rapport à l'antagoniste au point  $A$ . Enfin je désigne par  $R = (R_T, R_N)$  la paire des composantes de la force de réaction qu'exerce l'antagoniste sur le candidat, une force ou une percussion.

### 3 Unilatéralité

L'impénétrabilité signifie que deux corps ne peuvent s'interpénétrer mais sont libres d'être séparés,  $g \geq 0$  où  $g$  est l'interstice (la distance algébrique entre les deux corps). Moreau démontre,

$$\text{Si lors de tout contact } U_N^+ \geq 0 \text{ alors } g \geq 0 .$$

(en fait l'expression lors de tout contact exige plus de précisions).

Pour compléter et écrire une loi de contact simple et usuelle, on ajoute,

$g > 0 \Rightarrow R_N = 0$ , c'est-à-dire que la réaction est nulle si les corps sont séparés,

$R_N \geq 0$ , c'est-à-dire que les corps ne peuvent que se repousser,

$U_N^+ > 0 \Rightarrow R_N = 0$ , c'est-à-dire que si les corps se détachent aucune réaction ne s'exerce plus,

$R_N > 0 \Rightarrow U_N^+ = 0$ , c'est-à-dire qu'une réaction non négative entraîne une vitesse relative tangente aux corps en contact (cinématique rasante). Ces relations peuvent se rassembler sous la forme,

$$g > 0 \Rightarrow R_N = 0 ,$$

$$\text{Lors de tout contact } U_N^+ \geq 0 , R_N \geq 0 , U_N^+ \cdot R_N = 0 \quad (1)$$

La dernière expression est une relation de complémentarité. La condition précédente entraîne la condition classique,

$$g \geq 0 , R_N \geq 0 , g \cdot R_N = 0 , \quad (2)$$

connue sous le nom de condition de Signorini, elle-même une relation de complémentarité. On rencontre ici le parti pris de J.J. Moreau de privilégier les formulations en vitesse, ce qui présente des avantages. On notera que la condition en vitesse ci-dessus (1) implique une loi de choc inélastique.

La figure (2) représente le graphe de ces relations. On constate un certain nombre de particularités :

- 1) Ce graphe n'est pas un graphe d'application, mais de multi-application.  $R_N$  n'est pas une fonction de  $U_N^+$  (pour  $U_N = 0$ ,  $R_N$  peut prendre toutes les valeurs positives) et  $U_N^+$  n'est pas fonction de  $R_N$ .
- 2) La multi-application peut prendre des valeurs infinies (pour  $U_N^+ = 0$ ).
- 3) La multi-application n'est pas différentiable au point  $(0, 0)$ .

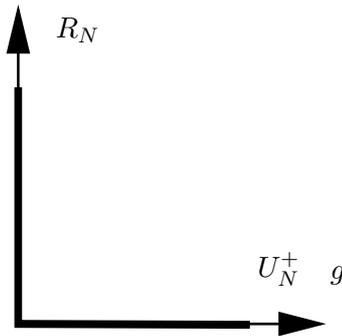


Figure 2: Graphe de Signorini.

Les outils de l'Analyse Convexe permettent de faire face à de telles situations non usuelles.

## 4 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb est une loi de frottement sec rudimentaire mais bien utile. Elle exprime que la composante tangentielle de la réaction  $R_T$  (la force de frottement) ne peut avoir un module supérieur à  $\mu R_N$  où  $R_N$  est la composante normale de la réaction et  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement. On dit aussi que la réaction est située à l'intérieur du cône de Coulomb. De plus en cas de glissement la force de frottement est opposée au glissement et a pour module  $\mu R_N$ .

$$\|R_T\| \leq \mu R_N ,$$

$$\|U_T^+\| \neq 0 \Rightarrow R_T = -\frac{U_T^+}{\|U_T^+\|} \mu R_N .$$

Le graphe de ces relations est représenté figure (3). On montre plus loin comment cette loi non régulière s'exprime en termes d'Analyse Convexe.

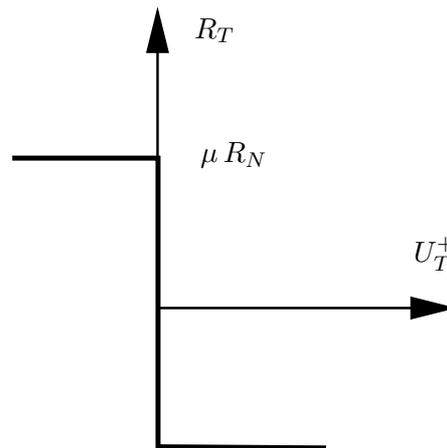


Figure 3: Graphe de Coulomb.

## 5 Analyse Convexe

Il ne rentre pas dans le cadre de ce texte de faire un exposé d'Analyse Convexe, ce qui demanderait beaucoup de place et de soin. En mentionnant quelques mots clés du vocabulaire, il est possible de montrer la structure des équations de la mécanique du contact. Les notions d'ensembles convexes, de cônes, sont imaginables.

La définition d'une fonction est généralisée. Une *fonction* est une application à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . La présence du symbole  $\infty$  s'accompagne de règles de calcul appropriées. Un exemple de fonction généralisée est la fonction *indicatrice* d'un ensemble convexe  $C$  définie ainsi ; soit  $f$  une force quelconque (j'emploie le langage de la mécanique),

$$\begin{aligned} \psi_C(f) &= 0 \quad \text{si } f \in C, \\ \psi_C(f) &= +\infty \quad \text{autrement,} \end{aligned}$$

On peut définir des *fonctions convexes*, des *fonctions semi-continues inférieurement (sci)*. Une fonction sci  $G$  possède une dérivée généralisée, le *sous-différentiel*. Sa valeur au point  $f$  est notée  $\partial G(f)$  (ensemble des pentes des minorantes affines exactes). Une autre notion importante est celle de *fonction conjuguée*  $v \rightarrow G^*(v)$  d'une fonction  $f \rightarrow G(f)$ .

Soit  $v, v'$ , deux vitesses quelconques et  $f, f'$ , deux forces quelconques, Les propositions suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} \forall f' \quad G(f') - G(f) - (v \cdot f' - f) &\geq 0, \\ \forall v' \quad G^*(v') - G^*(v) - (v' - v \cdot f) &\geq 0, \\ G^*(v) + G(f) - (v \cdot f) &= 0, \\ v &\in \partial G(f), \\ f &\in \partial G^*(v). \end{aligned}$$

Toute paire  $v, f$ , satisfaisant l'une de ces relations est dite *paire conjuguée* par  $G, G^*$ . Les deux premières relations sont des inéquations variationnelles, formulations duales l'une de l'autre. On les trouve dans la littérature démontrées au cas par cas dans divers espaces fonctionnels. Les deux dernières sont des inclusions différentielles. On va voir immédiatement comment se traduisent les relations de l'unilatéralité et du contact frottant.

A)  $f, v$ , sont des éléments de  $\mathbb{R}$  et  $C = \mathbb{R}^+$ ,

$$\psi_{\mathbb{R}^+}^* = \psi_{\mathbb{R}^-}.$$

La relation de Signorini s'écrit,

$$-U_N^+, R_N, \text{ sont conjuguées par les fonctions } \psi_{\mathbb{R}^+}^* = \psi_{\mathbb{R}^-}, \psi_{\mathbb{R}^+}.$$

Cette relation est équivalente à a), b) ou c),

- a)  $U_N^+ \geq 0, R_N \geq 0, U_N^+ \cdot R_N = 0,$
- b)  $R_N = \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_N - \rho U_N^+)$ , où  $\rho \geq 0$  est arbitraire,
- c)  $R_N \geq 0, \forall S \geq 0, U_N^+ \cdot (S - R_N) \geq 0.$

B)  $f, v$ , sont des éléments de  $\mathbb{R}^2$  et  $C$  est le disque de  $\mathbb{R}^2$ , de centre 0 et de rayon  $c$ ,  $C = \{f : \|f\| \leq c\}$ ,

$$\psi_C^*(v) = c\|v\|.$$

La loi de Coulomb s'écrit,

$$-U_T^+, R_T, \text{ sont conjuguées par les fonctions } \psi_C^*, \psi_C, \\ C = \mu R_N \mathbb{B} = \{S : \|S\| \leq \mu R_N\}.$$

Cette relation de conjugaison est équivalente à d) ou e),

- d)  $R_T = \text{proj}_{\mu R_N \mathbb{B}}(R_T - \rho U_T^+)$  où  $\rho > 0$  est arbitraire,
- e)  $R_T \in \mu R_N \mathbb{B}, \forall S \in \mu R_N \mathbb{B}, U_T^+ \cdot (S - R_T) \geq 0.$

Ces relations sont utiles aussi bien du point de vue mathématique que numérique. La relation de conjugaison peut s'écrire sous la forme,

$$-U_T^+ \in \partial\psi_C(R_T).$$

**Prenons l'exemple d'une particule d'abscisse  $x$  frottant sur une droite** (sur un plan, il en serait de même), reliée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité est assujettie à se déplacer sur la droite, et son abscisse est une fonction donnée du temps notée  $x_e(t)$ . On note  $k > 0$  la raideur du ressort. La force exercée par le ressort sur la particule s'écrit  $f(t) = -k(x(t) - x_e(t))$ . Cette force compense la force de frottement  $R_T$ ,  $R_T + f = 0$ . Avec ces notations  $U_T^+ = \dot{x}^+$ . L'équation précédente devient,

$$-\dot{x}^+ \in \partial\psi_C(k(x - x_e)).$$

Le convexe  $C$  contient le point 0. Posons  $\mathbf{C}(t) = \frac{1}{k}C + x_e(t)$ . L'équation précédente s'écrit,

$$-\dot{x}^+ \in \partial\psi_{\mathbf{C}}(x),$$

qui est l'équation typique d'un *problème de rafle* (sweeping process) par le convexe variable  $\mathbf{C}$ . De ce fait elle admet une solution unique. Les problèmes quasi-statiques de frottement,

d'unilatéralité, de plasticité parfaite, peuvent se mettre sous cette forme <sup>1</sup>.

## 6 Méthode CD

On considère l'exemple d'une particule pesante de masse  $m$  frottant sur une droite  $\vec{Ox}$  avec du frottement de Coulomb de coefficient  $\mu$ . L'abscisse de la particule est  $x$ . L'équation de la dynamique s'écrit,

$$m\ddot{x} = f + r ,$$

$f$  force appliquée dans la direction  $\vec{Ox}$ ,  $r = R_T$  force de frottement.

### Forme discrète de l'équation de la dynamique.

En intégrant les deux membres de l'équation de la dynamique sur l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}]$  on obtient l'équation de la dynamique discrétisée,

$$m(U_T(i+1) - U_T(i)) = f(i+1) + P_T(i+1) ,$$

$$f(i+1) = \int_{]t_i, t_{i+1}] } f(s) ds , \quad P_T(i+1) = \int_{]t_i, t_{i+1}] } R_T(\theta) d\theta ,$$

où  $U_T(i+1)$  est une approximation de  $\dot{x}^+(t_{i+1})$ ,  $U_T(i)$  est une approximation de  $\dot{x}^+(t_i)$  ; ce sont des vitesses de glissements ;  $P_T(i+1)$  est une impulsion, l'intégrale de toutes les forces et percussions pour la mesure appropriée  $d\theta$ , mesure de Lebesgue pour les forces ordinaires, mesures de Dirac pour les percussions.

$U_T(i+1)$  et  $P_T(i+1)$  sont les inconnues.

### Forme discrète de la loi de Coulomb.

On écrit que la paire  $U_T(i+1)$ ,  $P_T(i+1)$ , appartient au graphe de la loi de Coulomb (la composante normale est l'impulsion intégrale de la force de pesanteur sur  $]t_i, t_{i+1}]$  changée de signe,  $P_N(i+1) = (t_{i+1} - t_i) mg$ . On remarque que l'on a choisi d'écrire la loi de Coulomb sous une forme approchée en faisant jouer à la vitesse de glissement en fin de pas  $U_T(i+1)$  le rôle de la vitesse de glissement à droite et à l'impulsion  $P_T(i+1)$  le rôle de la réaction. Ceci est justifiable car la loi de Coulomb est une loi positivement homogène (si pour  $U_T$  la paire  $(R_T, R_N)$  satisfait la loi de Coulomb, la paire  $(\lambda R_T, \lambda R_N)$ ,  $\lambda > 0$ , satisfait aussi la loi de Coulomb). Il faut aussi admettre que pendant l'intervalle  $]t_i, t_{i+1}]$  la vitesse de glissement  $\dot{x}(t)$  garde un signe constant. La composante normale est l'impulsion intégrale de la force de pesanteur sur  $]t_i, t_{i+1}]$  changée de signe,  $P_N(i+1) = (t_{i+1} - t_i) mg$ . La loi de Coulomb approchée s'exprime ainsi en terme de vitesse de glissement en fin de pas et d'impulsion.

### Construction de la solution.

La paire  $(U_T(i+1), P_T(i+1))$ , solution du problème se trouve à l'intersection du graphe de Coulomb et du graphe de la droite d'équation  $U_T(i+1) = U_{\text{lib}} + m^{-1}P_T(i+1)$  de pente positive (graphe de l'équation de la dynamique linéarisée),  $U_{\text{lib}} = U_T(i) + m^{-1}f(i+1)$ . Dans ce problème particulier la solution est unique. Sur la figure (4)  $U_{\text{lib}} < 0$ . La solution  $U_T(i+1) < 0$  est un glissement arrière.

<sup>1</sup>J.J. Moreau *On unilateral constraints, friction and plasticity*, C.I.M.E. Bressanone, 1973.

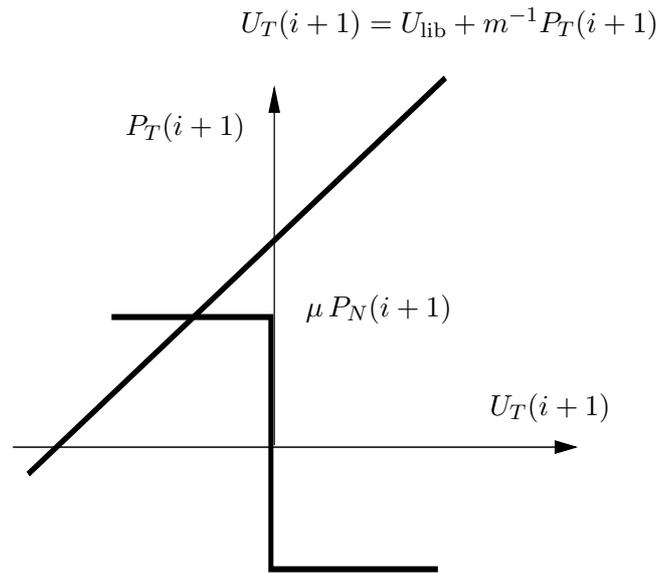


Figure 4: Solution de la dynamique d'une particule avec frottement de Coulomb.

Pour ce qui est du traitement de la condition de Signorini, l'approximation suit la même démarche.

Dans les problèmes plans avec contact unilatéral (et non pas contact persistant comme dans l'exemple précédent), on peut trouver la solution en discutant l'intersection du graphe de l'équation de la dynamique linéarisée avec les graphes de Signorini et de Coulomb dans l'espace à 4 dimensions,  $U_T, U_N, P_T, P_N$ . La solution est explicite. Elle est unique si le coefficient de frottement  $\mu$  n'est pas "exagéré". Dans les problèmes à 3 dimensions, la solution est à rechercher dans un espace à 6 dimensions ( $U_T, P_T$ , ont chacun 2 dimensions). Elle n'est pas explicite et on peut la trouver en quelques itérations.

Les considérations précédentes concernent le cas d'un seul contact. Lors-qu'il existe plusieurs contacts simultanés on procède ainsi.

On établit une liste des contacts :

- 1) Pour un contact, disons  $\alpha$ , entre deux corps chargés avec les impulsions extérieures et par les impulsions de contact de leurs voisins affectées de valeurs provisoires, on calcule comme on l'a dit la vitesse de glissement et l'impulsion du contact  $\alpha$ .
- 2) On actualise et on passe au contact suivant  $\alpha + 1$ .
- 3) On parcourt autant de fois la liste des contacts qu'il le faut pour atteindre la convergence. Chaque étape 1) consiste à résoudre un problème non linéaire dans un espace à 4 ou 6 dimensions. Cette méthode s'apparente donc à une *méthode de Gauss-Seidel non linéaire par blocs*.

## 7 Pertinence du tenseur de contrainte de Cauchy dans un matériau granulaire.

Parmi les nombreuses préoccupations de J.J. Moreau, celles concernant le tenseur des contraintes dans un matériau granulaire tiennent une place importante. Voici une expérience

numérique de J.J. Moreau tout à fait convaincante. Le tenseur des contraintes de Cauchy est un ingrédient de la mécanique des milieux continus du premier gradient. Ce tenseur mesure les forces intérieures. Plus précisément distinguons à l'aide d'une coupe (un plan) deux parties  $O$  et  $O'$  situées de part et d'autre de cette coupe et soit  $\vec{n}$  le vecteur normal en un point  $P$  de la coupe dirigé de  $O$  vers  $O'$ , figure (5, b). Soit  $\sigma$  le tenseur de contrainte de Cauchy, tenseur symétrique. Le vecteur  $\sigma\vec{n}$  représente la densité surfacique de forces exercée au point  $P$  par la partie  $O'$  sur la partie  $O$ . Lorsqu'on fait varier l'angle  $\theta$  de la coupe, les composantes tangentielle et normale de  $\sigma\vec{n}$  varient comme,

$$(\sigma\vec{n}) \cdot \vec{t} = -\frac{A-B}{2} \sin 2\theta \quad , \quad (\sigma\vec{n}) \cdot \vec{n} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \cos 2\theta .$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes dépendant du niveau de charge du milieu. Un calcul numérique est effectué, avec la méthode CD, dans un échantillon de matériau granulaire compressé, figure (5, a) <sup>2</sup>. Puis, pour divers angles de la coupe, en utilisant les valeurs numériques des forces intergranulaires, l'action d'une partie du milieu d'un côté de la coupe sur l'autre partie est reconstituée. Le diagramme figure (6) montre la réponse numérique, en trait gras comparée à la réponse d'un milieu continu. La réponse numérique est suffisamment proche de la réponse d'un milieu continu pour admettre que la notion de contrainte est pertinente dans un matériau granulaire.

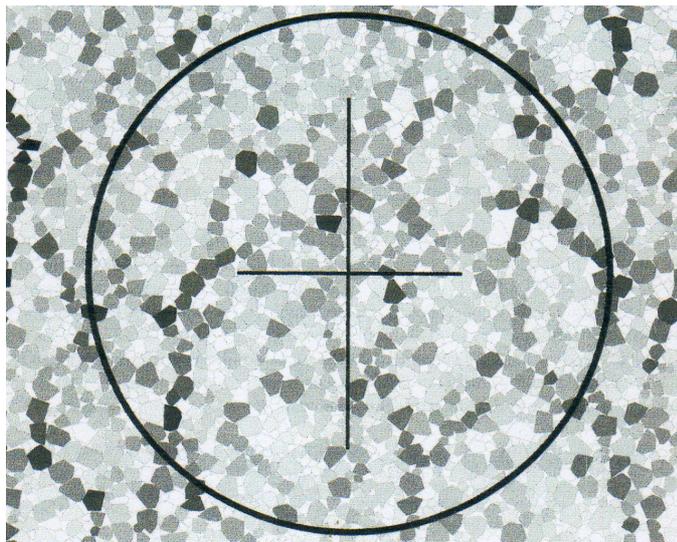


figure a

figure b

Figure 5: Coupe d'un échantillon

<sup>2</sup>Les niveaux de gris indiquent le chargement des grains, les plus chargés étant colorisés en gris foncé.

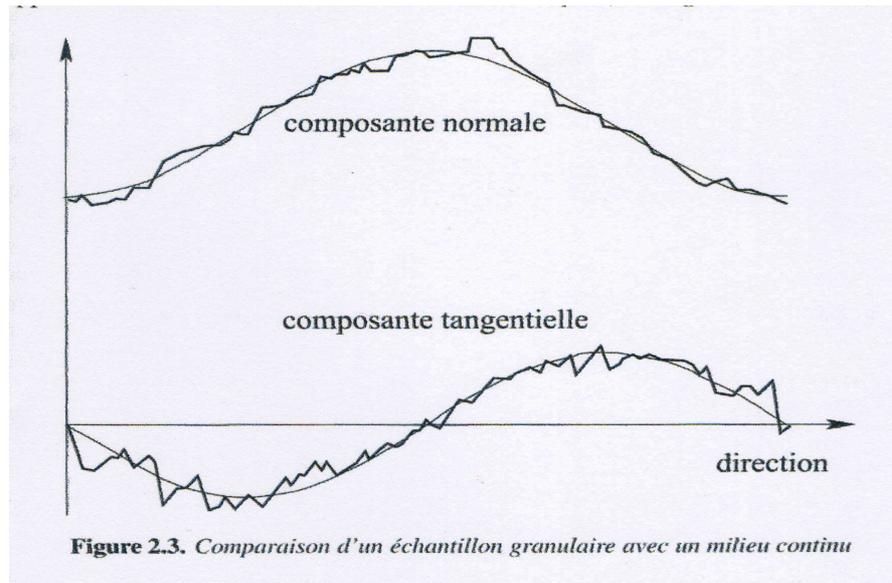


Figure 6: Tenseur de Cauchy, comparaison d'un échantillon granulaire avec un milieu continu.

## 8 Un exemple : le talus 2D

Pour donner un autre exemple d'investigation pratiquée par J.J. Moreau, je transcris le texte suivant rédigé par J.J. Moreau.

Début de citation :

On montre sur la figure 7 un modèle de talus en dimension 2, simulé avec un programme *Contact Dynamics*. Un terrain rugueux en pente fait avec l'horizontale un angle plus petit que l'angle de repos du matériau granulaire déposé (on pourrait même choisir un terrain horizontal, au prix d'un plus grand nombre de grains et d'un temps de calcul plus élevé). Le matériau granulaire déposé est constitué de grains rigides polygonaux de forme aléatoire. Ils sont déposés près de la frontière verticale gauche et s'accumulent de façon à former un talus au cours d'avalanches successives.

Coefficient de frottement : 0,3 ; coefficient de restitution : 0. Après avoir stoppé l'alimentation et laissé le talus s'équilibrer (en fait on peut obtenir des images similaires sans prendre cette précaution), les observations suivantes sont faites :

**LOI DE SURFACE LIBRE.**- *La force transmise au travers d'une coupe parallèle à la surface libre du talus est verticale.*

Ce phénomène s'explique facilement : quand une avalanche s'écoulant sur le talus s'arrête, les forces qu'elle reçoit de la part du matériau granulaire sous-jacent équilibrent son poids, et sont donc verticales. Ceci perdure quand des avalanches successives possédant la même propriété viennent se superposer aux couches déjà existantes.

On peut faire le rapprochement avec une affirmation usuelle en génie civil qu'un talus fraîchement déposé est dans un état de *glissement imminent*.

On observe aussi que *la force transmise au travers d'une coupe verticale est parallèle à la surface libre.*

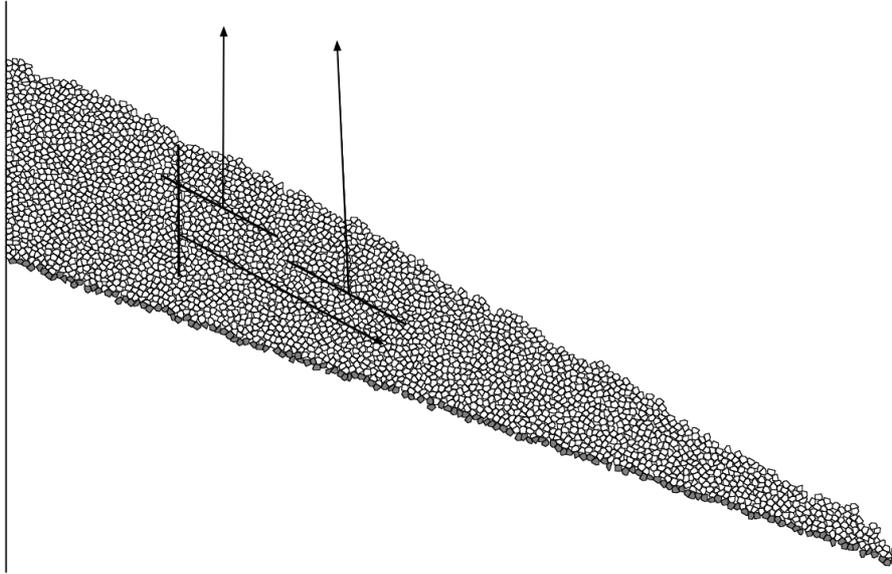


Figure 7: Transmission des forces dans un talus

En fait, cette dernière observation est mathématiquement équivalente à la précédente, si on remarque ceci :

Soit deux directions de coupe (en 2D ou 3D) définies par leurs vecteurs unitaires normaux  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}'$  ; soit  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  les vecteurs pressions (ou tractions) correspondantes. Si un tenseur de contrainte de type Cauchy est disponible pour relier  $\mathbf{T}$  à  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{T}'$  à  $\mathbf{n}'$ , la symétrie de ce tenseur entraîne  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T}$ . En particulier, si  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}' = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{T} = 0$ , il vient :

LEMME DES COUPES RÉCIPROQUES.- : *La coupe de normale  $\mathbf{n}$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{T}'$  si et seulement si la coupe de normale  $\mathbf{n}'$  est parallèle au vecteur  $\mathbf{T}$ .*

Fin de citation. Un film numérique de J.J. Moreau traite de cet exemple..

## 9 Définition du tenseur de contrainte dans une collection d'objets

Il s'avère que la définition constructive du tenseur de contrainte dans un matériau granulaire donne lieu à de multiples controverses. D'une part, parce que la définition usuelle, le tenseur de Weber, est sujette à certains arbitrages, par exemple dans le choix du point de référence dans chaque grain, d'autre part, parce que ce tenseur usuel n'est pas symétrique, de peu, mais il ne l'est pas, et c'est très contrariant. J.J. Moreau s'appuyant sur les fondements de la mécanique montre quelle doit être la démarche correcte pour définir le tenseur de contrainte. Il s'appuie sur la notion de *moment interne*. Nous décrivons ici sommairement les différentes étapes de la construction d'un tenseur de contrainte cohérent.

### Puissance d'un effort $\mathcal{F}$

Un effort  $\mathcal{F}$  est défini comme une fonctionnelle linéaire sur les champs de vitesses. Si on prend comme fonction test  $\varphi$  un champ affine,  $\varphi_i = a_i + b_{ij}x_j$  on trouve que la puissance d'un effort  $\mathcal{F}$  s'écrit,

$$\langle \mathcal{F}, \varphi \rangle = R_i a_i + M_{ij} b_{ji} . \quad (3)$$

Le vecteur  $\mathbf{R} = (R_i)$  est indépendant du repère choisi et s'appelle *résultante* de  $\mathcal{F}$ . Les  $M_{ij}$

sont les composantes d'un tenseur Euclidien du second ordre, noté  $\mathbf{M}(\mathcal{F}/\mathbf{o})$  appelé *moment tensoriel de degré 1 de  $\mathcal{F}$  par rapport à l'origine*.

La totalité des efforts exercés par les éléments de  $S$  sur lui-même, est nommée *effort intérieur total de  $S$*  noté  $\mathcal{F}_{\text{int}}(S)$ . Les autres efforts sont dits extérieurs.

### Le principe d'action-réaction

Ce principe peut s'énoncer sous la forme : *L'effort intérieur total d'un système matériel  $S$  possède une puissance nulle quel que soit le champ test  $\varphi$  égal à un champ de vitesse de mouvement rigide, c'est-à-dire un champ de vitesse de la forme  $\varphi_i(\mathbf{x}) = a_i + b_{ij}x_j$  avec  $b_{ji} = -b_{ij}$*

La résultante de cet effort est nulle et son moment tensoriel de degré 1 est égal à un tenseur *symétrique*  $\mathbf{M}^{\text{int}}(S)$  de rang 2, *indépendant du choix de l'origine*. Ce tenseur est appelé *moment tensoriel interne* de  $S$ .

### Exemple d'un milieu continu classique (du premier gradient).

Soit  $S$  une portion de milieu continu classique occupant un domaine borné  $\Omega$  de l'espace. On trouve,

$$\langle \mathcal{F}^{\text{int}}(S), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \varphi_{i,j} \sigma_{ji} dl.$$

où  $\sigma = (\sigma_{ji})$  est un tenseur *symétrique*. C'est le *tenseur de contrainte de Cauchy* défini ici dans une construction synthétique du modèle classique de milieu continu du premier gradient.

On trouve donc,

$$-\mathbf{M}^{\text{int}}(S) = \int_{\Omega} \sigma_{ji} dl,$$

et le tenseur de Cauchy apparait comme l'opposé de la densité de moment interne, soit en termes de mesure,

$$-dM = \sigma dl.$$

### Equilibre.

La puissance totale des efforts intérieurs et des efforts extérieurs est nulle pour tout champ test  $\varphi$ . En particulier si les  $\varphi$  sont linéaires, on trouve,

$$\mathbf{M}^{\text{int}}(S) + \mathbf{M}^{\text{ext}}(S) = 0.$$

### Cas du milieu continu classique.

On trouve en utilisant la formule de l'intégrale de Gauss-Ostrogradski,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dl = \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \otimes \mathbf{T}(\mathbf{x}) da + \int_{\Omega} \mathbf{x} \otimes \mathbf{f}^{\text{dist}}(\mathbf{x}) dl.$$

$\mathbf{T}$  densité surfacique de forces extérieures,  $\mathbf{f}^{\text{dist}}$  densité volumiques de forces extérieures.

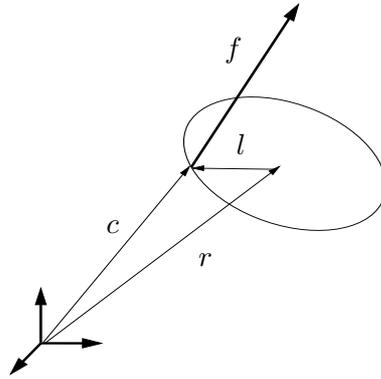
### Cas d'un matériau granulaire. Calcul grain par grain.

$\mathbf{f}^{\text{BE}}$  désigne la force exercée par un agent extérieur  $E \in X$ , parois, grains n'appartenant pas à la collection  $S$ , gravité, etc. sur un grain  $B \in S$ ,  $\mathbf{c}^{\text{BE}}$  est le vecteur point d'application

de cette force. Par analogie avec la formule ci-dessus on est amené à poser la *définition*,

$$\text{contrainte moyenne}(S) := \frac{1}{\text{vol}(S)} \sum_{B \in S} \sum_{E \in X} \mathbf{c}^{BE} \otimes \mathbf{f}^{BE},$$

où  $\text{vol}(S)$  note le volume de la région de l'espace couverte par l'échantillon granulaire, en incluant l'espace interstitiel.



Ce dernier terme est transformé de façon à faire ressortir une expression impliquant les forces de contact que les éléments de  $S$  exercent les uns sur les autres. On utilise entre autres les propriétés suivantes :

- la résultante des forces émanant de l'extérieur et des autres grains de  $S$  appliquées à un grain  $B$  de  $S$  est nulle ;
- le principe d'action et de réaction appliqué à chaque grain de  $S$  ;
- des sommations avec permutation des indices.

Ainsi l'expression de la contrainte moyenne apparait comme la somme de deux termes :

$$\begin{aligned} \text{contrainte moyenne}(S) := \\ \frac{1}{\text{vol}(S)} \sum_{B \in S} \sum_{E \in X} \mathbf{l}^{BE} \otimes \mathbf{f}^{BE} + \frac{1}{\text{vol}(S)} \sum_{B \in S} \sum_{B' \prec B} \mathbf{l}^{B'B} \otimes \mathbf{f}^{B'B}. \end{aligned}$$

Dans le premier terme seules apparaissent les forces extérieures. Dans le deuxième terme apparaissent seulement les forces intérieures à l'échantillon.

*Ce deuxième terme, fréquemment utilisé dans la littérature, est celui qui est usuellement adopté comme définition de la contrainte moyenne.* J.J. Moreau y fait référence sous le nom de contrainte de Weber.

Avoir négligé le premier terme dans le second membre ci-dessus a pour conséquence que ce tenseur présente le défaut de dépendre du choix des points de référence dans les grains et de ne pas être symétrique du fait de cette dépendance. Il fournit seulement une approximation de l'expression dérivée du moment tensoriel interne.

Pour résumer les considérations précédentes,

- 1) Il résulte des définitions que, dans un milieu continu du premier gradient le tenseur de Cauchy apparait comme l'opposé de la densité de moment interne.
- 2) Par similitude avec la formule d'Ostrogradsky on peut écrire une formule définissant la contrainte moyenne dans un matériau granulaire.
- 3) Après transformation avec les règles usuelles de la mécanique et de l'algèbre, on trouve que

la contrainte moyenne est la somme de deux termes : un terme qui ne fait intervenir que les forces extérieures sur les grains ; un deuxième terme qui fait intervenir uniquement les forces intergranulaires, reconnu comme l'usuel tenseur de Weber.

Ainsi, avoir négligé le premier terme a pour conséquence que le tenseur de Weber présente le défaut de dépendre du choix des points de référence dans les grains et de ne pas être symétrique du fait de cette dépendance. Il fournit seulement une approximation de l'expression du tenseur exact dérivé de la formule d'Ostrogradsky. Compte tenu de ses expériences numériques, J.J. Moreau fait remarquer que la différence entre le tenseur de contrainte (exact) et le tenseur de Weber n'est que de quelques pour cent. Ainsi, dit-il avec diplomatie, on pourra considérer que les résultats trouvés dans la littérature impliquant le tenseur de Weber, ne sont pas entachés d'erreurs importantes et restent valables.

## 10 L'opérateur divergence

On rappelle l'équation d'équilibre statique d'un milieu continu du premier gradient au sens des mesures,  $\sigma$  est le tenseur de contrainte de Cauchy, et  $-\sigma dl$  est la mesure moment interne.

$$\operatorname{div}(\sigma dl) + dF = 0 \quad \text{ou} \quad -\operatorname{div}(dM) + dF = 0 ,$$

où  $dF$  est la densité volumique de forces extérieures.

Il est possible de définir une mesure tenseur interne pour d'autres systèmes matériels. Par exemple, pour une portion de fil,

$$-\operatorname{div}(dM) + dF = 0 \quad , \quad dM = \theta \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} ds ,$$

$\theta$  tension du fil,  $\boldsymbol{\tau}$  "extension du fil".

J.J. Moreau traite d'autres exemples : collection finie de points matériels, ponts capillaires, sols saturés, mélange de ces systèmes matériels. Ces exemples indiquent la démarche pour exhiber la mesure interne de n'importe quel objet, pourvu qu'il relève d'une théorie du premier gradient, la notion de moment interne étant inhérente au premier gradient. On peut donc écrire la mesure moment interne pour n'importe quel mélange et l'équation d'équilibre statique du milieu s'écrit, comme dans le cas d'un milieu continu ordinaire,

$$-\operatorname{div}(dM) + dF = 0 .$$

## 11 Sources de références

On trouvera de nombreuses références sur les contributions de J.J. Moreau aux matériaux granulaires dans l'édition anglaise,

*Micromechanics of granular materials* edited by Bernard Cambou, Michel Jean and Farhang Radjaï, ISTE 2009.

et dans l'édition française ultérieure,

*Matériaux granulaires : modélisation et simulation numérique* sous la direction de Bernard Cambou, Michel Jean, Farhang Radjaï, 2012, Lavoisier.